I Exemples de graphes

Le graphe de **Kneser** $KG_{n,k}$ a pour sommets les sous-ensembles de taille k de $\{0, ..., n-1\}$ et une arête entre 2 sommets si ceux-ci sont disjoints.

1. Dessiner $KG_{5,2}$ (ce graphe particulier est appelé graphe de **Petersen**).
2. Quel est le nombre de sommets et d'arêtes de $KG_{n,k}$?

Un **hypercube** Q_n a pour sommets les mots binaires de taille n, 2 sommets étant reliés si ils différent d'un bit.

3. Dessiner Q_3.
4. Quel est le nombre de sommets et d'arêtes de Q_n?
5. Montrer que l'on peut aussi définir Q_n par récurrence.
6. Montrer que Q_n est **biparti** (ou **2-coloriable**) : on peut colorier ses sommets avec 2 couleurs de façon à ce que toute arête ait ses extrémités de couleurs différentes. Dessiner une telle coloration de Q_3.
7. Montrer que Q_n est **hamiltonien** : il existe un cycle (**hamiltonien**) qui visite tous les sommets exactement une fois. Dessiner un tel cycle de Q_3.

II Petites questions

1. Montrer que dans tout graphe avec au moins 2 sommets, il existe 2 sommets de même degré.
2. Montrer qu'un arbre avec un sommet de degré 2017 possède au moins 2017 feuilles (une feuille est un sommet de degré 1).
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Quel est le nombre minimum de composantes connexes d'un graphe à n sommets et $n-k$ arêtes?
4. Montrer que si $G = (V, E)$ est un graphe alors G ou $\overline{G} := (V, \overline{E})$ est connexe. Est-il possible que les deux soient connexes?
5. (Théorie de Ramsey) Montrer que dans tout graphe à 6 sommets, on peut trouver 3 sommets tous adjacents ou 3 sommets sans adjacence.

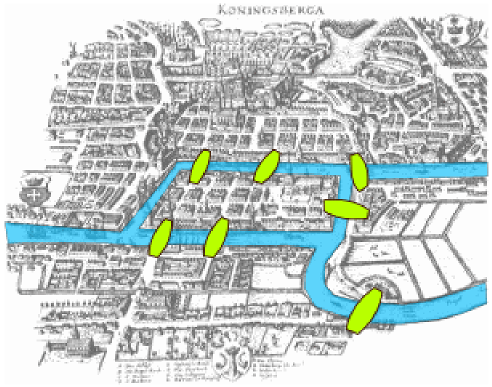
III Théorème de Mantel (graphe sans triangle)

Soit $G = (V, E)$ un graphe sans cycle de longueur 3 (un triangle).

1. Montrer que $\forall (u, v) \in E$, $\deg(u) + \deg(v) \leq |V|$.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{v \in V} \deg(v)^2 \leq |V||E|$.
3. En déduire que $|E| \leq \dfrac{|V|^2}{4}$ (théorème de Mantel).
4. Donner un exemple de graphe sans cycle de longueur 3 et vérifiant $|E| = \dfrac{|V|^2}{4}$.

Remarque : le théorème de Turán donne, plus généralement, le nombre maximum d'arêtes que peut contenir un graphe sans sous-graphe complet de taille p. Pour $p = 3$ on retrouve le théorème de Mantel.

IV Graphe eulérien



Euler (1736) s'est demandé s'il était possible de traverser tous les ponts de la ville de Königsberg exactement une fois.
Un **tour eulérien** dans un graphe est un cycle qui passe une fois exactement par chaque arête. Un graphe est **eulérien** s'il possède un tour eulérien.

1. Montrer que tous les sommets d'un graphe eulérien sont de degrés pairs.
2. Réciproquement, montrer qu'un graphe connexe $G = (V, E)$ dont les sommets sont de degrés pairs est eulérien.
   Écrire en pseudo-code un algorithme pour trouver un cycle eulérien. Quelle est sa complexité?
3. Est-il possible de traverser tous les ponts de Königsberg exactement une fois?
4. À quelle condition nécessaire et suffisante un graphe orienté contient un cycle eulérien?

Application : une liste de **De Bruijn** d'ordre p est une liste cyclique de bits contenant chaque mot binaire de longueur p exactement une fois.

5. Donner des listes de De Bruijn d'ordres 2 et 3.
6. Quelle est la longueur d'une liste de De Bruijn d'ordre p?
7. Comment déterminer en $\mathrm{O}(n)$ si une liste de taille n est De Bruijn d'ordre p? Implémenter cette méthode dans votre projet, en utilisant par exemple une liste chaînée cyclique.

On veut montrer l'existence d'une liste de De Bruijn pour tout $p \in \mathbb{N}$. Pour cela on considère le **graphe orienté de De Bruijn** dont les sommets sont les mots de longueurs $p - 1$ et avec un arc de u à v si $u = b_1 m$ et $v = m b_2$, où b_1 et b_2 sont des bits.

8. Dessiner le graphe de De Bruijn pour $p = 3$.
9. Montrer que ce graphe est eulérien et en déduire l'existence d'une liste de De Bruijn pour tout $p \in \mathbb{N}$.