Graphes : Représentations

Quentin Fortier

July 2, 2022

Structure abstraite graphe

On souhaite implémenter une structure de graphe possédant les opérations :

1. ajouter / supprimer une arête
2. (ajouter / supprimer un sommet)
3. savoir s'il existe une arête entre 2 sommets
4. connaître la liste des voisins d'un sommet
5. ...

Avec, si possible, une faible complexité en temps et espace.

Type abstrait graphe

Exemple de type abstrait de graphe :

```ocaml
type 'v graph = { (* 'v est le type des sommets *)
    add_edge : 'v -> 'v -> unit;
    del_edge : 'v -> 'v -> unit;
    edge : 'v -> 'v -> bool;
    n : int; (* nombre de sommets *)
    adj : 'v -> 'v list (* liste des sommets adjacents *)
}
```

Les sommets seront des entiers consécutifs à partir de 0.

Matrice d'adjacence

On peut représenter un graphe non orienté (V, E), où $V = \{0, ..., n-1\}$ par une **matrice d'adjacence** M de taille $n \times n$ définie par :

- $M_{i,j} = 1 \Longleftrightarrow \{i, j\} \in E$
- $M_{i,j} = 0 \Longleftrightarrow \{i, j\} \notin E$

Remarque : M est symétrique.

Matrice d'adjacence

On peut représenter un graphe non orienté (V, E), où $V = \{0, ..., n-1\}$ par une **matrice d'adjacence** M de taille $n \times n$ définie par :

- $M_{i,j} = 1 \iff \{i, j\} \in E$
- $M_{i,j} = 0 \iff \{i, j\} \notin E$

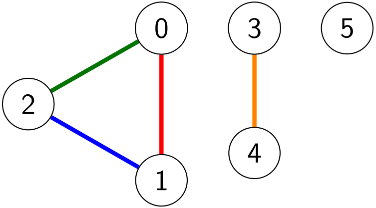
Remarque : M est symétrique.

Pour un graphe orienté $(V, \overrightarrow{E})$:

- $M_{i,j} = 1 \iff (i, j) \in \overrightarrow{E}$
- $M_{i,j} = 0 \iff (i, j) \notin \overrightarrow{E}$

M n'est pas symétrique (a priori).

Exemple de matrice d'adjacence (non orienté)



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quitte à permuter lignes et colonnes (i.e renuméroter les sommets), les composantes connexes apparaissent par bloc.

Matrice d'adjacence

Si on représente un graphe orienté à n sommets et m arêtes par matrice d'adjacence `m` :

- complexité en espace : $\Theta(n^2)$
- ajouter arête $\{u, v\}$: `m.(u).(v) <- 1`, $O(1)$
- supprimer arête $\{u, v\}$: `m.(u).(v) <- 0`, $O(1)$
- ajouter / supprimer sommet : impossible de modifier un **`array`**
- test d'existence d'arête : `m.(i).(j) = 1`, $O(1)$
- parcourir les voisins d'un sommet : parcourir `m.(i)`, $\Theta(n)$

Pour un graphe non orienté, il faut modifier `m.(u).(v)` et `m.(v).(u)`.

Matrice d'adjacence

`create_adj_mat n` renvoie un graphe orienté à n sommets (et 0 arête) représenté par matrice d'adjacence :

```
let create_adj_graph n =
    let m = Array.make_matrix n n 0 in {
        add_edge = (fun u v -> m.(u).(v) <- 1);
        del_edge = (fun u v -> m.(u).(v) <- 0);
        edge = (fun u v -> m.(u).(v) = 1);
        n = n;
        adj = (fun u ->
            let rec aux v =
                if v = n then []
                else if m.(u).(v) = 1 then v::aux (v + 1)
                else aux (v + 1) in
            aux 0
        )
    }
```

Puissance de la matrice d'adjacence

Question

Si $A = (a_{u,v})$ est une matrice d'adjacence d'un graphe à n sommets, que représente les coefficients de $A^k = (a_{u,v}^{(k)})$?

Puissance de la matrice d'adjacence

Question

Si $A = (a_{u,v})$ est une matrice d'adjacence d'un graphe à n sommets, que représente les coefficients de $A^k = (a_{u,v}^{(k)})$?

Pour $k = 2$:

$$a_{u,v}^2 = \sum_{w=0}^{n-1} a_{u,w} a_{w,v}$$

Puissance de la matrice d'adjacence

Question

Si $A = (a_{u,v})$ est une matrice d'adjacence d'un graphe à n sommets, que représente les coefficients de $A^k = (a_{u,v}^{(k)})$?

Pour $k = 2$:

$$a_{u,v}^2 = \sum_{w=0}^{n-1} a_{u,w} a_{w,v}$$

$$a_{u,w} a_{w,v} = 1 \iff u \to w \to v \text{ est un chemin}$$

$a_{u,v}^2$ est le nombre de chemins de longueur 2 de u à v !

Puissance de la matrice d'adjacence

Question

Si $A = (a_{u,v})$ est une matrice d'adjacence d'un graphe à n sommets, que représente les coefficients de $A^k = (a_{u,v}^{(k)})$?

$$a_{u,v}^{(k)} = \sum_{w=0}^{n-1} a_{u,w}^{(k-1)} a_{w,v}$$

Puissance de la matrice d'adjacence

Question

Si $A = (a_{u,v})$ est une matrice d'adjacence d'un graphe à n sommets, que représente les coefficients de $A^k = (a^{(k)}_{u,v})$?

$$a^{(k)}_{u,v} = \sum_{w=0}^{n-1} a^{(k-1)}_{u,w} a_{w,v}$$

Par récurrence sur k :

$$\boxed{a^{(k)}_{u,v} = \text{nombre de chemins de longueur } k \text{ de } u \text{ à } v}$$

Remarque : c'est vrai aussi bien pour les graphes orientés que non-orientés.

Puissance de la matrice d'adjacence

Soit $M(n)$ la complexité pour multiplier 2 matrices $n \times n$

Puissance de la matrice d'adjacence

Soit $M(n)$ la complexité pour multiplier 2 matrices $n \times n$ ($M(n) = \Theta(n^3)$ en naïf, O($n^{2,8}$) avec la méthode de Strassen).

On peut calculer $A^k = A \times ... \times A$ en O($kM(n)$).

Puissance de la matrice d'adjacence

Soit $M(n)$ la complexité pour multiplier 2 matrices $n \times n$ ($M(n) = \Theta(n^3)$ en naïf, O($n^{2,8}$) avec la méthode de Strassen).

On peut calculer $A^k = A \times ... \times A$ en O($kM(n)$).

Ou, mieux, par exponentation rapide en utilisant :

$$\begin{cases} A^k = (A^{\frac{k}{2}})^2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ A^k = A(A^{\frac{k-1}{2}})^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>Complexité</u> :

Puissance de la matrice d'adjacence

Soit $M(n)$ la complexité pour multiplier 2 matrices $n \times n$ ($M(n) = \Theta(n^3)$ en naïf, $O(n^{2,8})$ avec la méthode de Strassen).

On peut calculer $A^k = A \times ... \times A$ en $O(kM(n))$.

Ou, mieux, par exponentation rapide en utilisant :

$$\begin{cases} A^k = (A^{\frac{k}{2}})^2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ A^k = A(A^{\frac{k-1}{2}})^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Complexité : $O(\log(k)M(n))$.

Liste d'adjacence

La représentation par **liste d'adjacence** consiste à stocker, pour chaque sommet, la liste de ses voisins.

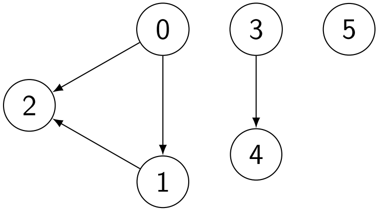
Liste d'adjacence

La représentation par **liste d'adjacence** consiste à stocker, pour chaque sommet, la liste de ses voisins.

Deux possibilités :

1. une liste de listes (`int list list`) `l0::l1::l2::...` où `l0` est la liste des voisins du sommet 0, `l1` est la liste des voisins du sommet 1...
2. un **tableau de listes** (`int list array`) `t` où `t.(i)` est la liste des voisins du sommet `i`.

Exemple de liste d'adjacence int list array (orienté)




```
#let g = [|[1; 2]; [2]; []; [4]; []; []|];;
g : int list vect = [|[1; 2]; [2]; []; [4]; []; []|]
```

Liste d'adjacence

`create_adj_list n` renvoie un graphe **orienté** à n sommets (et aucune arête) représenté par liste d'adjacence :

```
let create_adj_list n =
    let g = Array.make n [] in {
        add_edge = (fun u v -> g.(u) <- v::g.(u));
        del_edge = (fun u v -> List.filter ((<>) u) g.(v));
        edge = (fun u v -> List.mem v g.(u));
        n = n;
        adj = (fun u -> g.(u))
    }
```

Comparaison

Pour un graphe orienté à n sommets et m arêtes :

	`array array`	`list array`	`list list`
espace	$\Theta(n^2)$		
ajouter (u, v)	$O(1)$		
supprimer (u, v)	$O(1)$		
existence (u, v)	$O(1)$		
voisins de u	$\Theta(n)$		
ajouter sommet	X		
supprimer sommet	X		

Comparaison

Pour un graphe orienté à n sommets et m arêtes :

	`array array`	`list array`	`list list`
espace	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n+m)$	$\Theta(n+m)$
ajouter (u, v)	$O(1)$	$O(1)$	$O(n)$
supprimer (u, v)	$O(1)$	$O(\deg^+(u))$	$O(n)$
existence (u, v)	$O(1)$	$O(\deg^+(u))$	$O(n)$
voisins de u	$\Theta(n)$	$\Theta(\deg^+(u))$	$O(n)$
ajouter sommet	X	X	$O(n)$
supprimer sommet	X	X	$O(n)$

Comparaison

Pour un graphe orienté à n sommets et m arêtes :

	`array array`	`list array`	`list list`
espace	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n+m)$	$\Theta(n+m)$
ajouter (u, v)	$O(1)$	$O(1)$	$O(n)$
supprimer (u, v)	$O(1)$	$O(\deg^+(u))$	$O(n)$
existence (u, v)	$O(1)$	$O(\deg^+(u))$	$O(n)$
voisins de u	$\Theta(n)$	$\Theta(\deg^+(u))$	$O(n)$
ajouter sommet	X	X	$O(n)$
supprimer sommet	X	X	$O(n)$

Si $m = \Theta(n^2)$ (graphe dense) : matrice d'adjacence conseillée.
Si $m = O(n)$ (graphe creux, ex : arbre) : liste d'adjacence conseillée.

Exercice

Ecrire deux fonctions pour convertir une matrice d'adjacence en liste d'adjacence et vice-versa.

Dictionnaire d'adjacence

Représentation plus générale : un dictionnaire qui à chaque sommet associe l'ensemble de ses voisins, de type `('v, 'v set) dico`.

On peut utiliser n'importe quelle implémentation de `dico` et `set`, et n'importe quel type de sommet compatible avec ces implémentations.

Dictionnaire d'adjacence

Graphe orienté à n sommets et m arêtes représenté par un `('a,'a set) dico` avec la même implémentation de `set` et `dico` :

	`hashtbl`	AVL
type sommet	hachable	ordonné
espace	$\Theta(n+m)$	$\Theta(n+m)$
ajouter (u, v)	$O(1)$ moyenne	$O(\log(n))$
supprimer (u, v)	$O(1)$ moyenne	$O(\log(n))$
existence (u, v)	$O(1)$ moyenne	$O(\log(n))$
voisins de u	$\Theta(\deg^+(u))$ moyenne	$\Theta(\deg^+(u))$
ajouter sommet	$O(1)$ moyenne	$O(\log(n))$
supprimer sommet	$O(n)$ moyenne	$O(n)$