Table de hachage et dictionnaire

Quentin Fortier

July 2, 2022

Dictionnaire

On peut voir un tableau `t` comme une fonction qui à chaque indice `i` associe `t.(i)`
Les indices sont forcément des entiers consécutifs à partir de 0.

Dictionnaire

On peut voir un tableau `t` comme une fonction qui à chaque indice `i` associe `t.(i)`
Les indices sont forcément des entiers consécutifs à partir de 0.

Un **dictionnaire** est une structure de donnée plus générale qui à chaque **clé** associe une **valeur**. Il possède les opérations suivantes :

- Ajouter une association (clé, valeur)
- Supprimer une association (clé, valeur)
- Obtenir les valeurs associée à une clé donnée

Dictionnaire : en Python

```
D = {
    "blue": (0, 255, 0),
    "yellow": (255, 255, 0)
}

D["blue"]
# donne la valeur (0, 255, 0) associée à la clé "blue"

D["white"] = (255, 255, 255)
# ajoute une clé "white" de valeur (255, 255, 255)

"yellow" in D  # donne True

for k in D:  # affiche tous les couples (clé, valeur)
    print(k, D[k])
```

Les dictionnaires Python sont implémentés par table de hachage.

Dictionnaire : implémentations

Il y a plusieurs implémentations possibles de dictionnaire :

Opération	Liste de couples	ABR équilibré	Table de hachage
ajouter	$O(1)$	$O(\log(n))$	$O(1)$ en moyenne
supprimer	$O(n)$	$O(\log(n))$	$O(1)$ en moyenne
rechercher	$O(n)$	$O(\log(n))$	$O(1)$ en moyenne

On verra les ABR (arbres binaires de recherche) plus tard.

Dictionnaire : type abstrait

Type abstrait impératif de dictionnaire en OCaml :

```
module type DictImp = sig
  type ('k, 'v) d
  val empty: ('k, 'v) d
  val get : 'k -> ('k, 'v) d -> 'v option
  val add : 'k -> 'v -> ('k, 'v) d -> ('k, 'v) d
end
```

`get k` renvoie `None` si `k` n'est pas dans le dictionnaire.

Dictionnaire : implémentation par liste de couples

On pourrait implémenter un dictionnaire avec une liste de couples (clé, valeur) :

Dictionnaire : implémentation par liste de couples

On pourrait implémenter un dictionnaire avec une liste de couples (clé, valeur) :

```
module DictList : DictFun = struct
  type ('k, 'v) d = ('k * 'v) list
  let empty = []
  let rec get k = function
    | [] -> None
    | (k1, v1)::q -> if k = k1 then Some v1 else get k q
  let add k v d = (k, v)::d
end
```

Dictionnaire : implémentation par liste de couples

Exercice

Écrire une fonction `frequent` pour déterminer en $O(n)$ l'élément apparaissant le plus souvent dans une liste de taille n.

Dictionnaire : implémentation par liste de couples

Exercice

Écrire une fonction `frequent` pour déterminer en $O(n)$ l'élément apparaissant le plus souvent dans une liste de taille n.

Idée : utiliser un dictionnaire où les clés sont les éléments du tableau et les valeurs sont les fréquences.

Dictionnaire : implémentation par liste de couples

Exercice

Écrire une fonction `frequent` pour déterminer en $O(n)$ l'élément apparaissant le plus souvent dans une liste de taille n.

Idée : utiliser un dictionnaire où les clés sont les éléments du tableau et les valeurs sont les fréquences.

Complexité : $O(n)$ appels à `get` et `add`, ce qui donne $O(n)$ avec table de hachage

Dictionnaire : implémentation par liste de couples

Exercice

Écrire une fonction `frequent : int array -> int` pour déterminer en $O(n)$ l'élément apparaissant le plus souvent dans une liste de taille n.

```
let frequent t d = (* d : dict utilisé dans l'algo *)
    let maxi = ref t.(0) in
    let freq_maxi = ref 0 in
    for i = 0 to Array.length t - 1 do
        let freq = match d.get t.(i) with
            | None -> d.add (t.(i), 1); 1
            | Some f -> d.add (t.(i), f + 1); f + 1 in
        if !freq_maxi < freq
        then (maxi := t.(i); freq_maxi := freq)
    done;
    !maxi
```

Table de hachage

Une table de hachage est constituée:

1. d'un **tableau** (dynamique) `t` contenant les valeurs
2. d'une **fonction de hachage** h, de l'ensemble des clés vers les indices de `t`

La valeur associée à une clé k est stockée à l'indice $h(k)$ du tableau `t`.

Table de hachage

Une table de hachage est constituée:

1. d'un **tableau** (dynamique) `t` contenant les valeurs
2. d'une **fonction de hachage** h, de l'ensemble des clés vers les indices de `t`

La valeur associée à une clé k est stockée à l'indice $h(k)$ du tableau `t`.

Si la même clé est associée à plusieurs valeurs alors `t` doit être un tableau de listes.

Table de hachage

Une table de hachage est constituée:

1. d'un **tableau** (dynamique) `t` contenant les valeurs
2. d'une **fonction de hachage** h, de l'ensemble des clés vers les indices de `t`

La valeur associée à une clé k est stockée à l'indice $h(k)$ du tableau `t`.

Si la même clé est associée à plusieurs valeurs alors `t` doit être un tableau de listes.

Si les clés sont des entiers, on peut choisir $h : x \longmapsto x \mod n$.

Table de hachage

Une table de hachage est constituée:

1. d'un **tableau** (dynamique) `t` contenant les valeurs
2. d'une **fonction de hachage** h, de l'ensemble des clés vers les indices de `t`

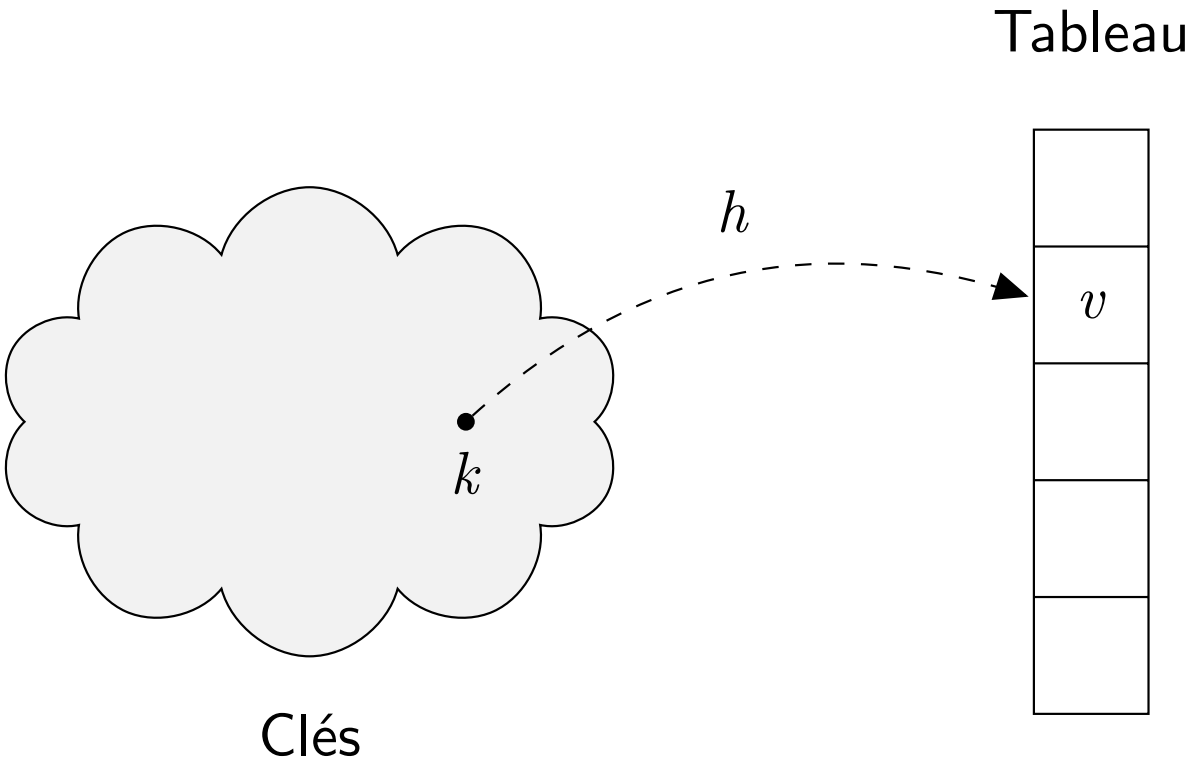
La valeur associée à une clé k est stockée à l'indice $h(k)$ du tableau `t`.

Si la même clé est associée à plusieurs valeurs alors `t` doit être un tableau de listes.

Si les clés sont des entiers, on peut choisir $h : x \longmapsto x \mod n$.

Sous quelques hypothèses, on peut montrer que les opérations de table de hachage sont en complexité moyenne $\mathrm{O}(1)$.

Table de hachage



h associe à chaque clé k un indice du tableau, dans lequel est stockée la valeur associée à k

Table de hachage

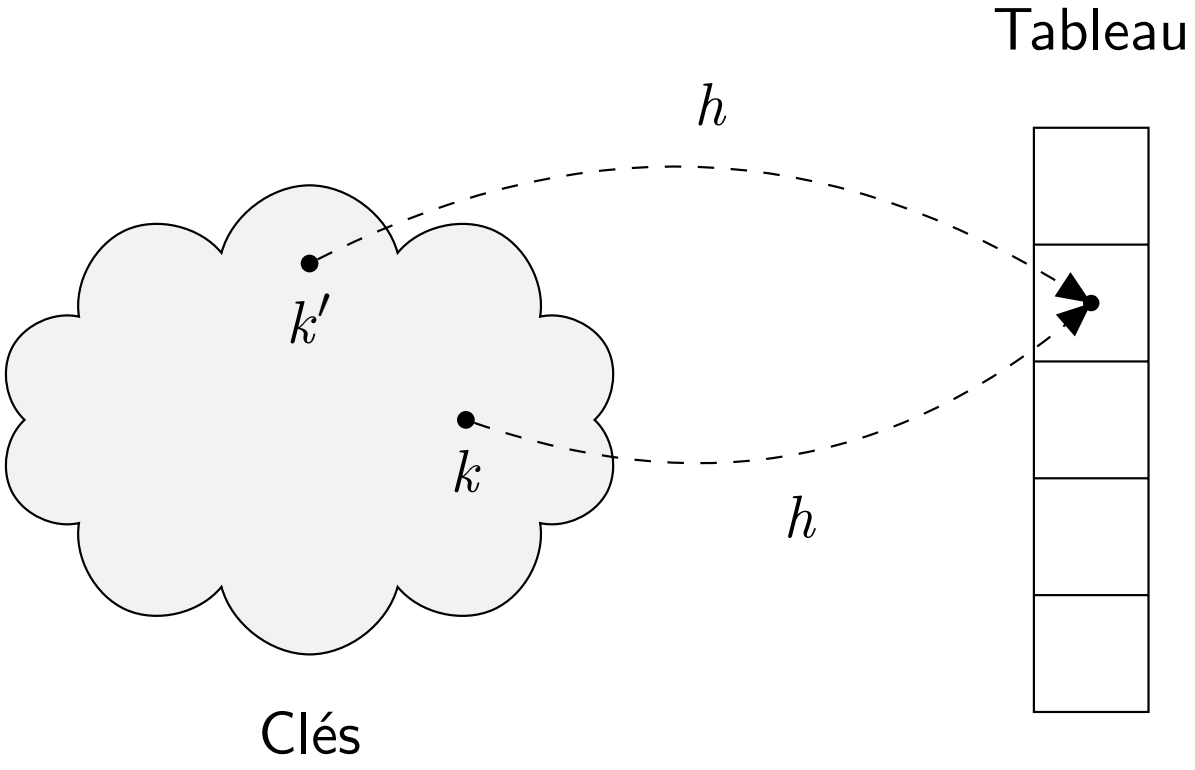
```
type ('k, 'v) hashtable = {
    t : ('k * 'v) option array;
    h : 'k -> int
};;

let hashtable_add ht (k, v) =
    ht.t.(ht.h k) <- Some v;;

let hashtable_get ht k =
    ht.t.(ht.h k);;

let hashtable_del ht k =
    ht.t.(ht.h k) <- None;;
```

Table de hachage : implémentation de dict

```
type ('k, 'v) dict = {
    add : 'k * 'v -> unit;
    del : 'k -> unit;
    get : 'k -> 'v option
}
```

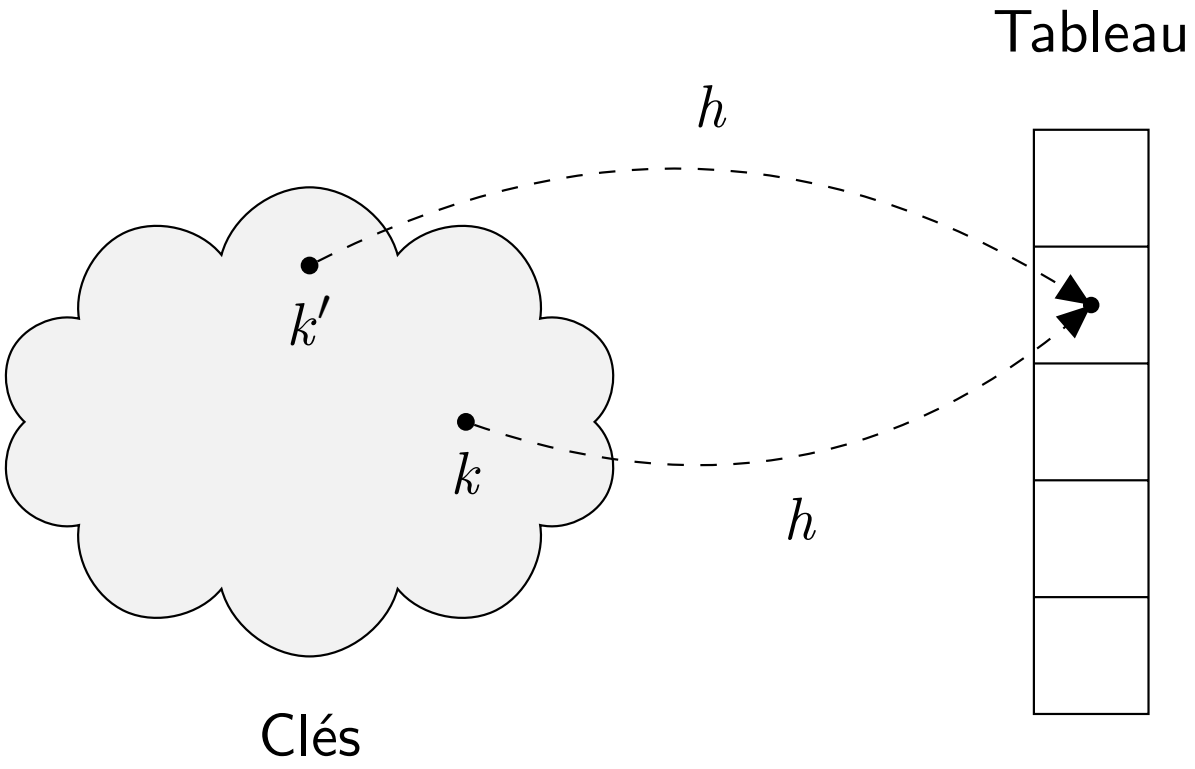
```
(* n est la taille du tableau à utiliser *)
let dict_of_hashtable n =
    let ht = {
        t = Array.make n None;
        h = fun k -> k mod n
    } in {
        add = hashtable_add ht;
        get = hashtable_get ht;
        del = hashtable_del ht
    }
}
```

Table de hachage : collision



Si deux clés ont le même hash, il y a une **collision**.

Table de hachage : collision



Si deux clés ont le même hash, il y a une **collision**.
Si le nombre de clés est supérieur à la taille du tableau, il y a forcément collision.

Table de hachage : collision

Résolution par chaînage : stocker une liste des couples (clé, valeur) dans chaque case du tableau.

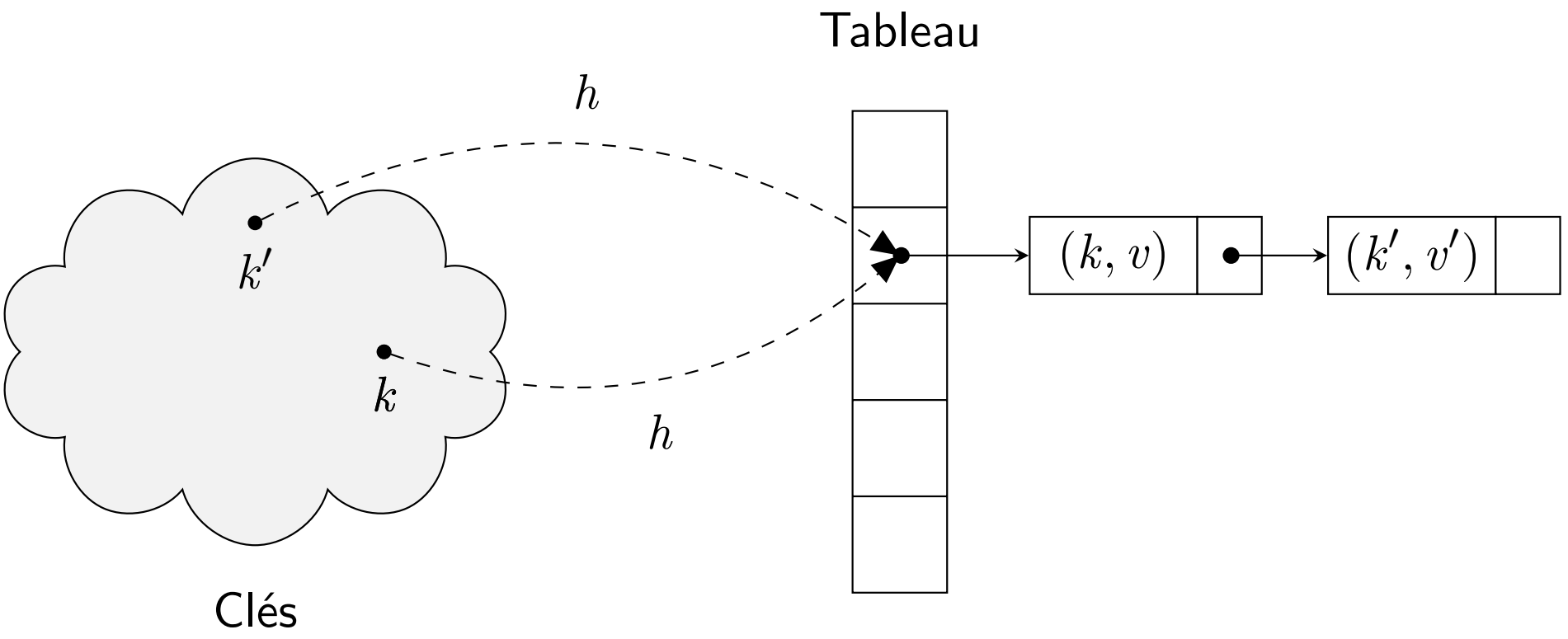


Table de hachage : collision

Résolution par *open adressing (probing)* :
Si une case du tableau est occupée, utiliser la suivante (jusqu'à tomber sur la clé cherché ou sur une case vide).

Ensemble : opérations

Un **ensemble** (set) est une structure de donnée avec 3 opérations :

- `add` : ajoute un élément à l'ensemble
- `del` : supprime un élément de l'ensemble
- `has` : teste si un élément est dans l'ensemble

Ensemble : opérations

Un **ensemble** (set) est une structure de donnée avec 3 opérations :

- `add` : ajoute un élément à l'ensemble
- `del` : supprime un élément de l'ensemble
- `has` : teste si un élément est dans l'ensemble

Type abstrait :

```
type 'a set = {
    add : 'a -> unit;
    del : 'a -> unit;
    has : 'a -> bool
}
```

Ensemble : en Python

```
s = {2, 3, 5, 7}  # ensemble

3 in s  # True
4 in s  # False

s.add(11)  # ajoute 11 à s

s1 | s2  # union de 2 ensembles
s1 & s2  # intersection de 2 ensembles
```

Ensemble : implémentation avec un dict

```
type ('k, 'v) dict = {
    add : 'k * 'v -> unit;
    del : 'k -> unit;
    get : 'k -> 'v option
}
```

On peut implémenter un `set` avec un `dict`, en utilisant que les clés :

```
let set_of_dict d = {
    add = (fun e -> d.add (e, 0));
    del = (fun e -> d.del e);
    get = (fun e -> match d.get e with
                    | None -> false
                    | Some _ -> true)
}
```

Ensemble : implémentation avec un dict

```
type ('k, 'v) dict = {
    add : 'k * 'v -> unit;
    del : 'k -> unit;
    get : 'k -> 'v option
}
```

On peut implémenter un `set` avec un `dict`, en utilisant que les clés :

```
let set_of_dict d = {
    add = (fun e -> d.add (e, 0));
    del = (fun e -> d.del e);
    get = (fun e -> match d.get e with
                    | None -> false
                    | Some _ -> true)
}
```

Avec table de hachage les opérations d'ensemble sont en $O(1)$ en moyenne.

Ensemble : exercice

Exercice

Expliquer comment déterminer si une liste contient un doublon, en utilisant un `set`.